

L'avaluació de la resolució de problemes

Joana Villalonga, Jordi Deulofeu

Resum

L'ensenyament competencial de les matemàtiques i l'avaluació de les dimensions en què s'estructura la competència matemàtica en el currículum actual són dos punts molt rellevants de l'ensenyament de les matemàtiques en l'educació obligatòria. En aquest article plantegem un conjunt de reflexions sobre la resolució de problemes i l'avaluació reguladora (i autoreguladora) d'aquesta dimensió, que inclouen dos instruments per a una possible realització d'aquesta avaluació, la més rellevant, al nostre parer, per tal que l'avaluació esdevingui realment un instrument d'ajuda real al desenvolupament del procés d'aprenentatge dels alumnes. Aquestes reflexions sorgeixen de les conclusions d'una tesi doctoral sobre aquesta temàtica en la qual es va implementar i millorar, amb alumnes d'entre onze i tretze anys, una base d'orientació per a la resolució de problemes.

Abstract

The competency-based teaching trend of mathematics and the assessment of the different dimensions in which mathematics education is presented in the current curriculum are two main aspects of the current compulsory mathematics education. In the present article, we reflect on problem solving and the regulative (and self-regulative) assessment sense of this mathematics dimension. These reflections lead us to introduce two regulative assessment tools with the aim that assessment becomes a really useful learning resource for students. All these inspections arise from the conclusions of a PhD focused on this topic. In particular, the developed research settled on the design, implementation and improving of a problem solving-related orientation basis for 11-13-year-old students.

1. Introducció

L'enfocament competencial del currículum català actual situa la resolució de problemes com la primera de les quatre dimensions en què es desglossa la competència matemàtica. Entesa com a procés que es desenvolupa al llarg de tot treball matemàtic, s'espera que els alumnes adquireixin les competències relacionades amb aquesta dimensió en el transcurs de la seva escolarització obligatòria.

D'acord amb aquest objectiu, esdevé complex determinar com s'hauria de treballar la resolució de problemes a les aules sota aquesta perspectiva de manera conseqüent, així com avaluar els efectes de les seves intencions. Resoldre problemes, així com aprendre'n, implica pensar matemàticament i actuar de manera conseqüent. Accions que requereixen, al seu torn, un sistema de regulació consistent que permeti, a qui resol el problema, gestionar i prendre decisions de manera responsable. En aquest sentit, s'observa que justament aquesta

competència de caràcter regulador és la diferència principal entre els resolutors més competents i els menys competents. No obstant això, s'evidencia una manca de mecanismes d'avaluació reguladora de la resolució de problemes en l'ensenyament i l'aprenentatge de la resolució de problemes, que permetrien una adquisició més eficient de les competències que requereix aquesta dimensió matemàtica.

Atesos el paper fonamental que té la regulació en la resolució de problemes i la falta del seu domini per part dels alumnes, ens demanem com s'hauria d'integrar l'avaluació de i per a la resolució de problemes de manera significativa i efectiva a les aules en un currículum com l'actual. Aquesta fou, en gran manera, la pregunta que promogué la realització de la tesi desenvolupada pel segon autor del present article i dirigida pel primer, i de la qual deriva la reflexió que es presenta aquí.

2. Resolució de problemes

Hi ha un acord general en el fet que la resolució de problemes presenta un doble perfil. D'entrada, no hi ha dubte que la resolució de problemes és una de les activitats més genuïnes de la matemàtica, ja que amb ella es posen en joc i prenen significat tots els aspectes de l'educació matemàtica. Té sentit, doncs, que una intervenció educativa adequada promogui no només l'ensenyament de les matemàtiques per a resoldre problemes, sinó també un ensenyament de les matemàtiques a partir de la resolució de problemes. Ara bé, alhora, resoldre problemes és, en si mateix, un procés clau dintre del treball matemàtic. És per això que esdevé la primera de les quatre dimensions matemàtiques, entesa com a procés més enllà dels blocs de contingut, que els alumnes han d'adquirir en el transcurs de la seva escolarització i que es fa necessari l'ensenyament del seu aprenentatge. Pren sentit, aleshores, la voluntat educativa de promoure a l'aula un ambient de treball basat en la resolució de problemes i, alhora, estimular l'autonomia de l'alumne en el procés d'aprendre a resoldre problemes.

Ara bé, per assolir aquest objectiu és necessari aclarir què entenem per problema matemàtic i què representa la seva resolució.

2.1. Resolució de problemes

D'acord amb les referències utilitzades en la tesi esmentada i gens lluny de la proposta del currículum català actual, entenem per problema matemàtic tota situació desconeguda en què es plantegen algunes qüestions per a les quals qui es decideix a trobar-hi resposta no disposa de cap solució immediata ni procés matemàtic directe o rutinari per trobar-la. Al contrari, requereix processos d'indagació que impliquen connectar els seus coneixements matemàtics per afrontar els obstacles que es presentaran al llarg del procés. Al seu torn, amb aquest procés es fomenta la consolidació i/o formació de coneixements matemàtics, així com la generació de qüestions vinculades a l'heurística o a l'ús d'instruments de caire matemàtic.

En aquest sentit, s'entén per connectar el fet d'usar i encaixar coneixements de què es disposa, que tant poden ser de caràcter conceptual o heurístic, com recursos materials o tècnics que permetin treballar aspectes matemàtics, com podria ser l'ús d'un transportador d'angles o una calculadora. A més d'aquests coneixements, s'hi poden veure involucrats

altres coneixements de naturalesa no matemàtica, generalment procedents del context en què es presenta la situació.

D'aquesta descripció es desprèn la distinció entre un problema pròpiament dit, que és quan, tot i tenir els coneixements necessaris, es desconeix *a priori* com es pot resoldre la tasca, i un exercici, que és quan, d'entrada, la tasca es pot resoldre de manera automàtica o rutinària.

D'altra banda, també es desprèn que la noció de problema matemàtic no és absoluta, sinó relativa a les habilitats matemàtiques de la persona que s'enfronta a la situació exposada, qui ha de sentir-se implicada i d'alguna manera atreta pel procés de buscar alguna resposta. Ha d'adquirir una participació activa que li comporti reflexionar, actuar de manera conseqüent i valorar la tasca que desenvolupa per si mateixa. Això l'ajudarà a voler superar els obstacles que es presentin al llarg del procés. En aquest sentit, la persona se sentirà involucrada en aquesta tasca quan es percebi a si mateixa com una *investigadora* que ha de trobar alguna conclusió respecte a les qüestions plantejades en la situació exposada de manera que li pugui proporcionar alguna satisfacció, ja sigui adquirint nous coneixements, ja sigui donant utilitat a qualsevol dels que ja tenia. Alhora, implica tenir el temps suficient per poder reflexionar sobre la tasca que està intentant desenvolupar.

2.2. Resoldre un problema matemàtic

D'acord amb això anterior, resoldre un problema matemàtic esdevé una activitat creativa i personal dirigida a uns objectius concrets que requereix l'activació i la relació de diferents tipus de coneixements matemàtics (bàsics, heurístics i sobre recursos) per donar resposta a una qüestió plantejada, cosa que contribuirà, al seu torn, al foment d'altres coneixements i qüestions, i, per tant, dirigida a uns objectius concrets.

Aquesta activitat queda definida per un procés no lineal, caracteritzat per moments d'entrebanc i etapes d'implicació concretes en el desenvolupament d'accions vinculades

Resoldre un problema requereix prendre decisions de manera raonada i regulada i, alhora, integrar diverses habilitats que en certa manera es poden resumir en: pensament creatiu i pensament crític, comunicació assertiva, flexibilitat, auto-coneixement, capacitat de decisió i control de les emocions i els sentiments.

Resoldre un problema no és aliè a les experiències anteriors relatives a la resolució de problemes. S'observa que tant les pràctiques anteriors com les creences que el resolutor té sobre la pràctica de resoldre problemes, com també dels seus coneixements i les seves habilitats, són un factor clarament influent en la seva acció de resolució del problema.

En aquest sentit, s'observa que la gestió de cada aula en particular per part del docent corresponent incideix de manera directa i notòria en aquests quatre factors que influeixen en la resolució de problemes dels alumnes. En particular, s'observa que amb la proposta de determinats problemes, així com l'ús o no de determinats instruments per a la resolució de problemes, es promou una major o menor connexió de coneixements. De manera paral·lela, els costums que perviuen a les aules semblen influenciar molt directament les creences dels alumnes, especialment modelant la seva actitud envers la resolució de problemes. D'aquestes

observacions sorgeix la imatge 1, que intenta il·lustrar l'actuació directa dels diferents factors descrits anteriorment en la presa de decisions.



Imatge 1. Factors que influeixen en l'adquisició de la competència en resolució de problemes i la confluència.

Atesa, però, la dificultat observada en els alumnes pel que fa a dominar la presa de decisions, s'evidencia la necessitat de potenciar en ells un sistema de regulació consistent que permeti fortificar aquest sistema de decisions i alhora fer front a les influències procedents de la resta de factors. Finalitat totalment possible però per a la qual es fa necessària la introducció d'instruments adequats i concrets més enllà de la proposició específica de problemes.

2.3. Perfils de resolutors de problemes

En aquest sentit, s'observa que justament la competència reguladora és la diferència principal entre els resolutors més competents i els menys competents.

Els resolutors més competents es defineixen per invertir més temps a comprendre i analitzar la situació del problema que a calcular i reflexionar contínuament sobre l'estat de resolució, així com a ser flexibles per anar amunt i avall en el procés de resolució. Per altra banda, els resolutors menys competents es caracteritzen per mostrar-se insegurs davant la resolució d'un problema, no acabar els processos iniciats, realitzar tasques aplicant maneres diferents, amb manca de coherència i d'ordre, o sense raonar, tot seguint processos algorítmics buits i sempre de manera lineal.

2.4. Finalitat de la resolució de problemes

De l'estudi realitzat en la tesi es desprèn que la resolució de problemes, com a activitat d'aula, comporta, si més no, tres funcions fonamentals, encara que no necessàriament disjunctes. Així doncs, a l'hora de portar la resolució de problemes a l'aula, es fa necessari distingir:

- La resolució de problemes com a mitjà per atraure la curiositat i l'interès matemàtic als alumnes.
- La resolució de problemes com a mitjà per donar utilitat als seus coneixements matemàtics i alhora descobrir-ne de nous.

- La resolució de problemes com a fi en si mateix per aprendre a pensar matemàticament i actuar (fet que també comporta comunicar) de manera conseqüent. Això significa prendre consciència del que implica resoldre un problema per, de manera autònoma, anticipar un procés de resolució en situacions futures, cosa que requereix un sistema d'autoregulació que permeti el reconeixement i l'autogestió i, en particular, prendre decisions de manera responsable.

En aquest sentit, observem que la dimensió del currículum actual centrada en la resolució de problemes equival a aquesta última finalitat de la resolució de problemes.

2.5. La regulació en la resolució de problemes

En parlar d'aquesta tercera finalitat de la resolució de problemes es detecta una absència de mecanismes dirigits a una avaluació reguladora tant de l'ensenyament com de l'aprenentatge de la resolució de problemes. En l'estudi desenvolupat pels autors, cap dels docents participants no coneixia ni disposava de cap instrument en aquest sentit. En canvi, però, tots van mostrar la seva preocupació quant a la gestió de l'autocontrol per part dels alumnes a l'hora de resoldre problemes, així com per poder-los ajudar a reconduir els estats que la manca d'aquesta regulació els comportava.

Es desprèn d'aquí la necessitat d'indagar entre eines o mecanismes que ajudin els alumnes a regular les seves accions. En particular, que els permetin aprendre a avaluar i regular el seu propi pensament i, amb això, a desenvolupar les habilitats necessàries per a la resolució de problemes. Aquestes habilitats de resolució es poden resumir en: interpretar la situació plantejada, identificar subobjectius de realització, planificar l'estratègia que s'ha de desenvolupar i avaluar les habilitats desenvolupades.

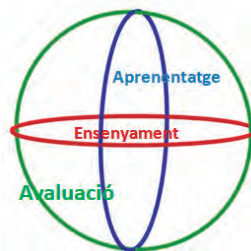
L'experiència desenvolupada mostra que, més enllà de proposar problemes de tipologia diversa i/o convidar a utilitzar diferents recursos amb els quals afrontar-los, cal proveir els alumnes d'eines que els ajudin a reconèixer i regular les seves accions. En altres paraules, cal assegurar que els alumnes disposin d'instruments específics que els permetin reflexionar sobre la seva pràctica, mantenir clars els objectius i prendre consciència de les seves accions de resolució i de connexió de coneixements, i que promoguin la seva motivació. En definitiva, instruments que assegurin una avaluació reguladora i, en particular, formadora tant en l'àmbit local com en l'àmbit global de la resolució de problemes.

De manera paral·lela, també és necessària l'existència d'instruments reguladors per als docents, que els possibilitin recopilar aquesta informació de manera conseqüent i, així, ser capaços d'intervenir, en cas que sigui necessari, en la regulació de com es treballa la regulació en la resolució de problemes a l'aula, en general, i per part de cadascun dels alumnes, en particular. En aquest sentit, podem dir que quan l'objectiu principal de la resolució de problemes és millorar la competència en el procés de resoldre problemes, a més de suggerir la resolució de problemes diversos, convé que els alumnes disposin d'instruments que els ajudin a regular les seves accions. Per a això, però, es fa imprescindible que els alumnes deixin constància del procés desenvolupat, del qual han de destacar els factors més rellevants, sobretot per ala pròpia comprensió, però també per a la d'altres, per tal que així es puguin considerar en altres situacions. Sorgeix així la necessitat que el resolutor no només resolgui

una situació, sinó que la doni a conèixer i destaquí els elements i processos portats a terme, així com els descobriments intermedis que donen peu a les conclusions finals. De la mateixa manera, és important que aprengui a destacar els obstacles amb què s'ha trobat i reflecteixi com han estat reconduïts.

3. Avaluació

D'acord amb els últims currículums dels plans docents de Catalunya, entenem que l'avaluació ha d'anar dirigida a millorar l'aprenentatge de l'alumnat. En aquest sentit, es fa necessari que els alumnes siguin conscients dels objectius de l'aprenentatge, així com dels criteris i procediments amb els quals se'ls avaluarà. Al mateix temps, l'avaluació és l'única eina que permet regular alhora i de manera coordinada l'ensenyament i l'aprenentatge, atès que permet que mestres (avaluació formativa) i alumnes (avaluació formadora) puguin identificar les dificultats que sorgeixen al llarg del procés educatiu i prenguin les decisions oportunes per assolir els objectius acordats. Amb això es confirma que l'avaluació és la que lliga i dona coherència als processos d'ensenyament i aprenentatge, i això mostra que el procés educatiu està format per la terna avaluació-ensenyament-aprenentatge. Té sentit afirmar, doncs, que els processos avaluadors donen sentit i consistència a qualsevol procés d'ensenyament i aprenentatge. Observem que l'avaluació actua com a pont en doble sentit entre l'ensenyament i l'aprenentatge, de manera que el propi aprenentatge es converteix en mode d'ensenyament per a un mateix. La figura 2 pretén il·lustrar la terna avaluació-ensenyament-aprenentatge que, en forma esfèrica, dona sentit a tot procés educatiu, l'interès del qual recau en l'aprenentatge dels alumnes perquè puguin aprendre i actuar de manera conseqüent i autònoma al llarg de la seva vida.



Imatge 2. Vinculació entre avaluació, ensenyament i aprenentatge.

Per dur a terme una avaluació consistent són imprescindibles tres accions fonamentals: la recollida de dades, l'anàlisi d'aquestes dades i, finalment, la presa de decisions d'acord amb l'anàlisi realitzada, ja sigui a càrrec del professorat, entre iguals o per un mateix. En tot cas, emetre judicis per a un mateix és la finalitat última d'un procés d'ensenyament en què es pretén que qui aprèn esdevingui una persona autònoma i responsable del seu propi procés d'aprenentatge. De fet, aprendre a avaluar-se és, segurament, la condició més important per aprendre a aprendre, així com per esdevenir més autònom a aprendre fent qualsevol activitat.

4. L'avaluació de la dimensió en la resolució de problemes

L'estudi desenvolupat pels autors és un primer intent de mostrar que és possible fer una avaluació reguladora de la resolució de problemes.

No és fàcil avaluar el treball matemàtic que desenvolupa cada un dels alumnes en resoldre problemes, especialment a causa dels diversos tipus de pensament i d'errors que poden sorgir en les seves pràctiques, però és justament aquest treball el que permet ajustar els instruments d'avaluació als objectius finals desitjats. Per això esdevé una tasca essencial identificar —*a priori*, així com *a posteriori*— les competències necessàries i suficients que es veuen involucrades en les accions que desenvolupen els alumnes durant la resolució d'un problema, i les habilitats necessàries per aconseguir cadascuna d'aquestes competències.

D'acord amb tot això anterior, l'estudi ens ha permès identificar dos possibles instruments d'avaluació reguladora de l'ensenyament i l'aprenentatge de la dimensió en la resolució de problemes: la base d'orientació, entesa com l'instrument que resumeix de manera gràfica i ordenada les accions necessàries basades en el comportament de resolució de problemes dels resolutors més competents i que, d'acord amb l'edat i les necessitats dels alumnes per als quals s'elabora, pretén proporcionar-los, de manera emergent, autonomia a l'hora de resoldre problemes matemàtics; i la rúbrica de desenvolupament, entesa com la matriu que explicita els criteris de realització que s'han de tenir en compte per a l'avaluació de la dimensió en la resolució de problemes i els criteris de resultats corresponents als diferents nivells d'assoliment. Val a dir que, per a una avaluació coherent, les accions que descriu la base d'orientació i els criteris de realització que presenta la rúbrica han d'estar vinculats.

Pel que fa a la base d'orientació, s'ha observat que hauria d'estar basada en els tres moments fonamentals en què tot resolutor es troba a l'hora de resoldre un problema:

- El concret, quan es tracta d'entendre què exposa la situació.
- El representatiu, quan cal dissenyar i aplicar com s'ha d'abordar el problema.
- L'abstracte, quan convé reflexionar sobre el fet per donar resposta i veure'n les aplicacions futures.

A més, cada etapa es pot desglossar, com a mínim, en dues accions (o subobjectius) de resolució fonamentals. D'aquestes conclusions sorgeix la taula 1:

Taula 1. Nivells i subnivells d'implicació fonamentals del procés de resolució d'un problema.

Etaques de resolució	Subobjectius de resolució
↓	↓
Nivells d'implicació	Subnivells d'implicació
Comprendre el problema	<ul style="list-style-type: none"> • Familiaritzar-se amb la situació i les condicions exposades en l'enunciat. • Extreure la informació útil de l'enunciat i recompondre la necessària per entendre la situació matemàtica.
Tenir un pla	<ul style="list-style-type: none"> • Utilitzar la redefinició de l'enunciat per buscar maneres d'abordar la situació problemàtica. • Convèncer-se que alguna de les maneres permet arribar a alguna conclusió sobre la situació exposada.
Validar el que s'ha realitzat	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretar els resultats i amb ells donar una resposta coherent i consistent. • Revisar i sintetitzar les solucions trobades.

Per altra banda, es conclou que una rúbrica per avaluar la resolució de problemes entesa com a dimensió, hauria de permetre la recollida de dades en relació amb els punts següents que estableix la taula 2:

Taula 2. Proposta base per a la creació d'una rúbrica per a l'avaluació de la dimensió en resolució de problemes.

Què s'interpreta, i com, de la situació?

- Quines dades selecciona i utilitza.
- Com utilitza les dades.
- Com codifica les dades.
- Com relaciona les dades.

Estableix, i com, una via de resolució?

- Com examina possibles vies de resolució?
 - Fa proves sense estructura.
 - Fa deduccions.
 - Busca analogies.
- Com convenç d'una via de resolució?
 - Quin llenguatge utilitza: llenguatge verbal o llenguatge matemàtic.
 - Tipus de verbalització: argumentació, explicació o reproducció.

Valida, i com, la solució?

- Comprova les estratègies i les solucions d'acord amb les condicions de l'enunciat.
- Sintetitza les conclusions o les accions desenvolupades d'acord amb la qüestió formulada.
- Examina altres solucions o intenta millorar les respostes.

És flexible durant el procés?

- Coherència entre els llenguatges i les formes de representació utilitzats.
- Reconeix i reconduïx moments d'entrebanc.

S'implica en el procés de resolució?

- Coherència i cohesió entre les accions de resolució desenvolupades.
 - Inferències entre etapes de resolució.
 - Evidència de descobertes o punts clau.
-

Som conscients que el conjunt d'implicacions didàctiques exposades aquí sobre la resolució de problemes, la seva gestió i la importància de la seva avaluació, exigeix una atenció i una dedicació importants per part del professorat. Amb l'article, doncs, simplement esperem haver estat capaços, amb la nostra investigació, d'aportar alguns elements útils, tant en termes de producte, com especialment de reflexió, sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge de la resolució de problemes de matemàtiques i la seva possible avaluació.

5. Bibliografia

5.1. Referències principals

Villalonga Pons, J. (2018). *La competència matemàtica. Caracterització d'activitats d'aprenentatge i d'avaluació en la resolució de problemes en l'educació obligatòria*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals.

Villalonga Pons, J. i Deulofeu, J. (2017). «La base de orientación en la resolución de problemas. Reflexiones sobre las evidencias de su uso en el paso de la primaria a la secundaria». A: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (eds.). *VIII CIBEM*. Madrid. En línia: http://www.cibem.org/images/site/LibroActasCIBEM/ComunicacionesLibroActas_CB301-400.pdf (consulta: gener 2019).

Villalonga Pons, J. i Deulofeu, J. (2017). «Representar problemas usando una base de orientación». *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 75, 59-65.

Villalonga Pons, J. i Deulofeu, J. (2016). «(Re)bastir la base d'orientació en la resolució de problemes. Una anàlisi dels entrebancs». A: FEEMCAT (ed.). *Actes C²EM*. Barcelona.

5.2. Referències de la tesi

Callejo, M. L. (1996). «Evaluación de procesos y progresos del alumnado en la resolución de problemas». *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 8, 53-63.

Corte, E. de, Verschaffel, L. (2003). «El desarrollo de habilidades de autoregulación en la solución de problemas matemáticos». *Pensamiento Educativo*, 32, 286-305.

Departament d'Ensenyament. Generalitat de Catalunya (2016). *Un currículum competencial per a l'educació primària. Un pas més cap a l'assoliment de les competències bàsiques*. En línia: http://ateneu.xtec.cat/wiki/form/wikiexport/_media/cursos/curriculum/inf_pri/cape/info_prima_ria_29_6.pdf (consulta: gener 2019).

Direcció General d'Educació Infantil i Primària. Departament d'Ensenyament. Generalitat de Catalunya (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació primària* (en línia). Barcelona: Servei de Comunicació i Publicacions. <http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/primaria/prim-matematic.pdf> (consulta: gener 2019).

Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat. Departament d'Ensenyament. Generalitat de Catalunya (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació secundària obligatòria* (en línia). Barcelona: Servei de Comunicació i Publicacions. <http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/eso/eso-matematic.pdf> (consulta: gener 2019).

Lester, F. K., Kroll, D. L. (1991). «Evaluation: A new vision». *The Mathematics Teacher*, 84(4), 276-284.

Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Wokingham: Addison-Wesley.

Sanmartí, N. (2010). *Avaluar per aprendre. L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències*. En línia: http://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0024/fc53024f-626e-423b-877a-932148c56075/avaluar_per_aprendre.pdf (consulta: gener 2019).

Schoenfeld, A. H. (2013). «Reflections on problem solving theory and practice». *The Mathematics Enthusiast*, 10(1&2), 9-34.

Vila, A., Callejo, M. L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid: Narcea.

